矩阵可对角化的判定条件:

$A\in F^{n\times n}$ 可对角化 $\Leftrightarrow$ 存在 n 个线性无关的特征向量.

可对角化 $\Leftarrow$ 存在 n 个互不相同的特征值.

可对角化 $\Leftrightarrow$ 代数重数 = 几何重数.

任意矩阵,总存在零化多项式:

引理: 1) 任意 $A\in F^{n\times n}$, $\exists f(x)\in F[x]\backslash\{0\}$ s.t.

$$f(A)=0$$

2) 哈密尔顿-凯莱定理: $P_A(A)=0$.

为相似不变量!

称次数最小且首系数为1的零化多项式为A的极小多项式

定理: 1) A可对角化 $\Leftrightarrow$ A的极小多项式无重根.

2) A可对角化 $\Leftrightarrow$ A存在无重根的零化多项式

例: 若 $A^2=A$, $A^2=I$ 或 $A^3=A$ $\cdots$, 则 A 可对角化.

解: (1) $A^2=A$: 因为 x^2-x 无重根, 所以 A 可对角化.

$A\xi=\lambda\xi\ (\xi\neq 0) \Rightarrow 0=(A^2-A)\xi=(\lambda^2-\lambda)\xi$

$\Rightarrow \lambda^2-\lambda=0 \Rightarrow \lambda=0$ 或 $\lambda=1$

$\Rightarrow A\sim\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0\end{pmatrix}$ $0\le r\le n$. $(0\le r+s\le n)$

类似地. $A^2=I\Rightarrow A\sim\begin{pmatrix} I_r & \\ & -I_{n-r}\end{pmatrix}$ $A^3=A\Rightarrow A\sim\begin{pmatrix} I_r & & \\ & -I_s & \\ & & 0\end{pmatrix}$ ①

§ 相似上三角形化

不是每个矩阵都可以对角化（例 $\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$），但可上三角化！

定理：1) 任何一个 n 阶复方阵 A 都相似于一个上三角形矩阵 J，且

2) J 的对角线上元素为 A 的全体特征值．

证：1) 对 n 归纳．$n=1$ ✓　设结论对 $n-1$ 阶方阵成立．

· 任取 A 的特征值 λ_1 及特征向量 $\vec{x}_1$，

· 将 $\vec{x}_1$ 扩充为 $\mathbb{C}^n$ 的一组基 $\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_n$．则

$$A(\vec{x}_1,\cdots\vec{x}_n)=(\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_n)\begin{pmatrix}\lambda_1&*\\0&A_1\end{pmatrix}$$

记 $T=(\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_n)\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 则 T 可逆且

$$A=T\begin{pmatrix}\lambda_1&*\\&A_1\end{pmatrix}T^{-1}\overset{\text{归纳}}{=\!=}T\begin{pmatrix}\lambda_1&*\\&S_1J_1S_1^{-1}\end{pmatrix}T^{-1}$$

$$=\underbrace{T\begin{pmatrix}1&\\&S_1\end{pmatrix}}_{=S}\underbrace{\begin{pmatrix}1&\\&S_1^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1&*\\&S_1J_1S_1^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\\&S_1\end{pmatrix}}\underbrace{\begin{pmatrix}1&\\&S_1^{-1}\end{pmatrix}T^{-1}}_{S^{-1}}$$

$$=S\overbrace{\begin{pmatrix}\lambda_1&**\\0&J_1\end{pmatrix}}^{=J}S^{-1}=SJS^{-1}$$

2) A 与 J 有相同的特征值，且 J 的特征值为对角线上的元素．□

注：J 的取法不唯一！**例如** $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$ 相似

$$\begin{pmatrix}2&\\&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\\&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$$

例： $A\in\mathbb{C}^{2\times 2}$. $A^2=0 \Rightarrow A=0$ 或 A 相似于 $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$.

证：A 的特征值均为 0. $\left(Ax=\lambda x\ (x\neq 0) \Rightarrow 0=A^2x=\lambda^2 x \Rightarrow \lambda^2=0\right)$

定理 $\Rightarrow A\sim\begin{pmatrix}0&a\\0&0\end{pmatrix}$

1° $a=0 \Rightarrow A\sim 0 \Rightarrow A=0$

2° $a\neq 0 \Rightarrow A\sim\begin{pmatrix}0&a\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&\\&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a^{-1}&\\&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$

§6.5* 若尔当标准形

相似等价类中最简代表元？

定义： $\lambda\in\mathbb{C}$，$m\in\mathbb{N}$，

1) 若尔当块 $J_m(\lambda):=\begin{pmatrix}\lambda&1&&\\&\lambda&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&\lambda\end{pmatrix}_{m\times m}$

例：$\left(\begin{array}{cc|c}1&1&\\&1&\\\hline&&1\end{array}\right)$ $\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$ $\left(\begin{array}{cc|c}1&1&\\&1&\\\hline&&2\end{array}\right)$ 等.

2) 若尔当矩阵 $J=\mathrm{diag}\left(J_{m_1}(\lambda_1),J_{m_2}(\lambda_2),\cdots,J_{m_s}(\lambda_s)\right)$

定理： 1) $\forall A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，存在若尔当矩阵 J s.t. A 与 J 相似.

2) 不计若当块的排序下，J 是唯一的.

称 J 为 A 的若尔当标准形.

例： λ 为 $A\in\mathbb{C}^{5\times 5}$ 的 5 重特征值，分析 A 的若尔当标准形.

$5=5=4+1=3+2=3+1+1=2+2+1=2+1+1+1=1+1+1+1+1$

$J_5(\lambda)$, $\begin{pmatrix}J_4(\lambda)&\\&\lambda\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}J_3(\lambda)&\\&J_2(\lambda)\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}J_3(\lambda)&&\\&\lambda&\\&&\lambda\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}J_2(\lambda)&&\\&J_2(\lambda)&\\&&\lambda\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}J_2(\lambda)&&&\\&\lambda&&\\&&\lambda&\\&&&\lambda\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}\lambda&&&&\\&\lambda&&&\\&&\lambda&&\\&&&\lambda&\\&&&&\lambda\end{pmatrix}$

例：求 $A=\begin{pmatrix}3&-2&1\\2&-2&2\\3&-6&5\end{pmatrix}$ 的若尔当标准形

解：$P_A(\lambda)=\det(\lambda I-A)=(\lambda-2)^3$

$\Rightarrow J_1=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&2\end{pmatrix}$ $J_2=\begin{pmatrix}2&1&\\&2&\\&&2\end{pmatrix}$ 或 $J_3=\begin{pmatrix}2&1&\\&2&1\\&&2\end{pmatrix}$

$\mathrm{rank}(J-2I)=\mathrm{rank}(A-2I)=1 \Rightarrow J=J_2$!

A的若尔当标准形.

$\mathbb{R}$-线性空间	$\xleftrightarrow[1:1]{\text{基 } \alpha_1\cdots\alpha_n}$	$\mathbb{R}^n$
v	$\longleftrightarrow$	$\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$
$\mathcal{A}$	$\longleftrightarrow$	A
长度，夹角 ??	$\longleftrightarrow$	长度，夹角 (内积 $\vec{x}\cdot\vec{y}=x_1y_1+\cdots+x_ny_n$)
$\mathcal{A}$ 保持长度不变的线性变换	$\longleftrightarrow$	A ??
??	$\longleftrightarrow$	转置 A^T
??	$\longleftrightarrow$	对称矩阵